第９講　極値をもつことの証明，不等式の不等式への応用，球が外接するとき

25　2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$

と定義する．$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ．

《14 九大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

26 以下の問いに答えよ．

(1) n を自然数，a を正の定数として，

$$f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x$$

とおく．$x>0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$$

《14 東北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

27　半径1の2つの球 S_1 と S_2 が1点で接している．互いに重なる部分のない等しい半径を持つ n 個 $(n \geqq 3)$ の球 T_1，T_2，…，T_n があり，次の条件(ア)(イ)を満たす．

(ア)　T_i は S_1，S_2 にそれぞれ1点で接している $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

(イ)　T_i は T_{i+1} に1点で接しており $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，そして T_n は T_1 に1点で接している．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　T_1，T_2，…，T_n の共通の半径 r_n を求めよ．

(2)　S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，T_1，T_2，…，T_n の体積の和を W_n とするとき，極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}$$

を求めよ．

《14 阪大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　極値をもつことの証明，不等式の不等式への応用，球が外接するとき

25 2以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$

と定義する．$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ１つの極値をとることを証明せよ．

《14 九大・理系》

【答】 略

【解説】 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，

$$\begin{aligned} f_n{}'(x) &= 1\cdot(2x-1)\cdots(nx-1)\\ &+ \cdots\\ &+ (x-1)\cdots\{(k-1)x-1\}\cdot k\cdot\{(k+1)x-1\}\cdots(nx-1)\\ &+ \cdots\\ &+ (x-1)\cdots\{(n-1)x-1\}\cdot n \end{aligned}$$

となる．

このとき $f_n{}'(1)\cdot f_n{}'\left(\dfrac{1}{2}\right)=(n-1)!\cdot\left(-\dfrac{1}{2^{n-2}}\right)(n-2)!<0$,

$f_n{}'\left(\dfrac{1}{n-1}\right)\cdot f_n{}'\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{(-1)^{n-2}}{(n-1)^{n-2}}(n-2)!\cdot\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{n-2}}(n-1)!<0$ であり，

$2\leqq k\leqq n-2$ なる整数 k に関しては

$$\begin{aligned} f_n{}'\left(\frac{1}{k}\right) &= \frac{(-1)^{k-1}}{k^{n-1}}(k-1)\cdots1\cdot k\cdot1\cdots(n-k)\\ f_n{}'\left(\frac{1}{k+1}\right) &= \frac{(-1)^{k}}{(k+1)^{n-1}}k\cdots1\cdot(k+1)\cdot1\cdots(n-k-1) \end{aligned}$$

より $f_n{}'\left(\dfrac{1}{k}\right)\cdot f_n{}'\left(\dfrac{1}{k+1}\right)<0$ となる．

よって $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，常に $f_n{}'\left(\dfrac{1}{k}\right)$ と $f_n{}'\left(\dfrac{1}{k+1}\right)$ は異符号となる．ここで $f_n{}'(x)$ が連続関数で，$n-1$ 次関数であることより，中間値の定理から $f_n{}'(x)=0$ となる x が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ にただ１つだけ存在し，それを α_k とすると，$f_n(x)$ の増減は

x	$\frac{1}{k+1}$	$\cdots$	α_k	$\cdots$	$\frac{1}{k}$
$f_n{}'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		↗		↘	

または

x	$\frac{1}{k+1}$	$\cdots$	α_k	$\cdots$	$\frac{1}{k}$
$f_n{}'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$		↘		↗	

となる．

以上より $f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ１つの極値をとることが示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

26 以下の問いに答えよ.

(1) n を自然数, a を正の定数として,

$$f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x$$

とおく. $x>0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ. ただし, 対数は自然対数とする.

(2) n が 2 以上の自然数のとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$$

《14 東北大・理系》

【答】 (1) 極小値 0　　(2) 略

【解説】 (1) $f'(x)=(n+1)\cdot\dfrac{1}{a+x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{nx-a}{x(a+x)}$ より $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{n}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

となるので, $f(x)$ の極値は極小値で $f\left(\dfrac{a}{n}\right)=(n+1)\log\dfrac{a}{n}-n\log\dfrac{a}{n}-\log\dfrac{a}{n}=\mathbf{0}$

(2) (1)の結果より

$$f(x)\geqq 0 \iff (n+1)\log\frac{a+x}{n+1}-n\log\frac{a}{n}-\log x\geqq 0$$

$$\iff \left(\frac{a+x}{n+1}\right)^{n+1}\geqq\left(\frac{a}{n}\right)^{n}x \iff \frac{a+x}{n+1}\geqq\left(\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}x^{\frac{1}{n+1}}\quad\cdots①$$

が成り立つ.

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\dfrac{k+1}{k}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+1}{1}+\dfrac{2+1}{2}\right)=\dfrac{7}{4}=\sqrt{\dfrac{49}{16}}>\sqrt{3}$, $(2+1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ より $n=2$ のとき与式は成り立つ.

ここで, $n=l(\geqq 2)$ のとき $\dfrac{1}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{l}\dfrac{k+1}{k}>(l+1)^{\frac{1}{l}} \iff \displaystyle\sum_{k=1}^{l}\dfrac{k+1}{k}>l(l+1)^{\frac{1}{l}}$ を仮定すると

$$\frac{1}{l+1}\sum_{k=1}^{l+1}\frac{k+1}{k}=\frac{1}{l+1}\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{k+1}{k}+\frac{l+2}{l+1}\right)$$

$$>\frac{1}{l+1}\left\{l(l+1)^{\frac{1}{l}}+\frac{l+2}{l+1}\right\}\quad(\because\ 仮定)$$

$$\geqq\left\{\frac{l(l+1)^{\frac{1}{l}}}{l}\right\}^{\frac{l}{l+1}}\cdot\left(\frac{l+2}{l+1}\right)^{\frac{1}{l+1}}\quad\left(\because\ ①\text{ で }n=l,\ a=l(l+1)^{\frac{1}{l}},\ x=\frac{l+2}{l+1}\right)$$

$$=(l+2)^{\frac{1}{l+1}}$$

となり, $n=l+1$ のときにも与式が成り立つことになる.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって数学的帰納法により，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$　$(n\geqq 2)$ が示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

27 半径１の２つの球 S_1 と S_2 が１点で接している．互いに重なる部分のない等しい半径を持つ n 個 $(n \geqq 3)$ の球 T_1，T_2，…，T_n があり，次の条件㈠㈡を満たす．

㈠ T_i は S_1，S_2 にそれぞれ１点で接している $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$．

㈡ T_i は T_{i+1} に１点で接しており $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，そして T_n は T_1 に１点で接している．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) T_1，T_2，…，T_n の共通の半径 r_n を求めよ．

(2) S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，T_1，T_2，…，T_n の体積の和を W_n とするとき，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_n}{V_n}$$

を求めよ．

《14 阪大・理系》

【答】 (1) $r_n = 2\tan^2 \dfrac{\pi}{n}$ (2) $\dfrac{2}{3}$

【解説】 (1) S_1 と S_2 の接点を P，S_1 の中心を Q，T_1 と T_2 の中心を順に $\mathrm{R_1}$，$\mathrm{R_2}$ とすると，三角形 $\mathrm{PQR_1}$ は $\angle \mathrm{QPR_1} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形より $1^2 + \mathrm{PR_1}{}^2 = (1+r_n)^2$ …①.

また，$\mathrm{R_1}$ と $\mathrm{R_2}$ の中点を M とすると三角形 $\mathrm{PMR_1}$ は $\angle \mathrm{PMR_1} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形より

$\sin\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{r_n}{\mathrm{PR_1}}$ …②.

①，②より $r_n\left(2\tan^2\dfrac{\pi}{n} - r_n\right) = 0$ となるので

$\boldsymbol{r_n = 2\tan^2 \dfrac{\pi}{n}}$.

(2) 三角形 $\mathrm{PQR_1}$ を含む平面で，P を原点，Q を $(0,\ 1)$ とし，$\mathrm{R_1}$ を x 軸の正の部分の点とすると，

T_1 の断面は $(x-\mathrm{PR_1})^2 + y^2 = r_n{}^2$ と表されるので $x = \mathrm{PR_1} \pm \sqrt{r_n{}^2 - y^2}$ である．よって

$$\begin{aligned} V_n &= \int_{-r_n}^{r_n} \pi(\mathrm{PR_1} + \sqrt{r_n{}^2 - y^2})^2 dy - \int_{-r_n}^{r_n} \pi(\mathrm{PR_1} - \sqrt{r_n{}^2 - y^2})^2 dy \\ &= 8\pi \mathrm{PR_1} \int_0^{r_n} \sqrt{r_n{}^2 - y^2}\, dy \end{aligned}$$

となる．ここで $\displaystyle\int_0^{r_n} \sqrt{r_n{}^2 - y^2}\, dy$ において $y = r_n \sin\theta$ と置換積分することにより

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\begin{aligned}\int_0^{r_n}\sqrt{{r_n}^2-y^2}\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r_n|\cos\theta|\cdot r_n\cos\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} {r_n}^2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\ &= {r_n}^2\left[\frac{2\theta+\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{{r_n}^2}{4}\pi\end{aligned}$$

なので $V_n=2\pi^2{r_n}^2\mathrm{PR}_1$ を得る．また $W_n=\dfrac{4}{3}\pi{r_n}^3\times n$ より

$$\frac{W_n}{V_n}=\frac{\frac{4}{3}\pi{r_n}^3\times n}{2\pi^2{r_n}^2\mathrm{PR}_1}=\frac{2nr_n}{3\pi\mathrm{PR}_1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{n}\to\boldsymbol{\frac{2}{3}}\ (n\to\infty)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。